

### Travail Pratique n° 3 : Générateurs de nombres aléatoires

- 1) Programmez en Matlab une fonction qui prend en entrée les trois paramètres  $a$ ,  $c$  et  $m$  du générateur de congruences linéaires ainsi que le  $i$ ème terme  $y_i$  de la suite pseudo-aléatoire et qui renvoie le terme  $y_{i+1}$ .
- 2) Quelle est la valeur de  $y_{10}$  quand  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 16807$  et  $c = 0$  avec  $y_0 = 1$ ? *Remarque : ce générateur, formulé par Park et Miller est un bon générateur convenablement testé, et appelé le Standard Minimal).*
- 3) Programmez en Matlab une fonction qui prend en entrée deux jeux de trois paramètres  $(a_x, c_x, m_x)$  et  $(a_y, c_y, m_y)$  du générateur de congruences linéaires, deux graines  $x_0$  et  $y_0$  et deux entiers  $N$  et  $k$ , et qui retourne le vecteur des  $k$  premières valeurs de la suite  $z_i$  obtenues avec la méthode des mélanges appliquées aux suites pseudo-aléatoires  $x_i$  et  $y_i$ .

On cherche maintenant à tester nos générateurs. Pour cela nous allons utiliser deux type de test : le test spectral qui consiste à tracer les paires  $(y_{2i}/m, y_{2i+1}/m)$  comme des points dans le carré  $[0, 1[ \times [0, 1[$ , et le test d'adéquation qui consiste à tracer la fonction cumulative des nombres obtenus.

- 4) Tracez les paires  $(y_{2i}/m, y_{2i+1}/m)$  pour 10000 points obtenus avec les générateurs suivants et  $y_0 = 1$  :
  - i.  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 16807$ ,  $c = 0$  (Standard Minimal),
  - ii.  $m = 2^{31}$ ,  $a = 65539$ ,  $c = 0$  (RANDU implémenté dans les IBM System/310),
  - iii.  $m = 2^{32}$ ,  $a = 129$ ,  $c = 907633385$  (générateur de Turbo Pascal),
  - iv.  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 127$ ,  $c = 0$ ,
  - v.  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 31$ ,  $c = 0$ ,
  - vi.  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 2^{29} - 1$ ,  $c = 0$ .
  - vii.  $m = 2^{48}$ ,  $a = 31167285$ ,  $c = 1$  (générateur de Lavaux et Jenssens).

Que remarquez-vous ? Quels sont les bons générateurs ?

- 5) Est-ce que la méthode des mélanges améliore significativement la qualité des suites pseudo-aléatoires mesurée avec le test spectral ?
- 6) Ecrivez une procédure qui trace une estimation de la fonction cumulative d'un générateur aléatoire et une procédure qui trace une estimation de sa fonction de densité. Tracez ces estimations pour les sept générateurs ci-dessus (avec 10000 termes de chaque suite).

L'objectif des quelques questions suivantes est de construire un générateur de la loi normale.

- 7) Expliquez pourquoi la méthode du rejet ne peut pas être utilisée pour générer des réalisations de la loi normale si  $g(x)$  est la densité d'une distribution uniforme.
- 8) Tracer la densité  $f(x)$  de la loi normale centrée réduite ainsi que la densité suivante :

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Trouver une valeur de  $M$  pour laquelle  $f(x) \leq Mg(x)$ .

- 9) Programmez en Matlab une fonction qui prend en entrée les trois paramètres  $a$ ,  $c$  et  $m$  du générateur de congruences linéaires, deux valeurs  $\mu$  et  $\sigma$ , une graine  $y_0$  et un entier  $k$  et qui renvoie un vecteur de  $k$  réalisations de la loi normale centrée réduite obtenues par la méthode des rejets avec la densité  $g$  et la valeur  $M$  de la question précédente. *Indication : Les réalisations de la variable aléatoire de densité  $g(x)$  seront obtenues en utilisant la méthode des fonctions inverses.*
- 10) Ecrivez une fonction Matlab qui prend en entrée les trois paramètres  $a$ ,  $c$  et  $m$  du générateur de congruences linéaires ainsi qu'une graine  $y_0$  et un entier  $k$  et qui renvoie un vecteur de  $k$  réalisations de la loi normale centrée réduite obtenues par la méthode de Box et Miller.

Les questions restantes portent sur la simulation par la méthode de Monte-Carlo.

- 11) Dans un jeu télévisé, le présentateur montre trois portes fermées au candidat. Derrière l'une de ces trois portes se trouve un cadeau et le candidat doit choisir la porte à ouvrir. Au moment où le candidat fait son choix, le présentateur n'ouvre pas la porte choisie mais une des deux autres portes, derrière laquelle

le cadeau ne se trouve pas. Le candidat peut alors maintenir son choix, ou le modifier. Que lui conseillez-vous de faire ?

- 12) Utilisez la méthode de Monte-Carlo pour trouver la probabilité de gagner dans le cas où le candidat ne modifie pas son choix (on utilisera le générateur de Lavaux et Jenssens avec  $y_0 = 1$  et  $M = 100000$  simulations). Quelle est votre conclusion ?
- 13) Reprenez le modèle discret de pricing développé pendant le TP n°2 et écrivez un priceur d'options (d'achat et de vente) européennes utilisant la méthode de Monte-Carlo. Les paramètres passés au priceur seront les valeurs de  $r$ ,  $u$ ,  $d$ ,  $K$ ,  $S$  et  $T$ , ainsi que les paramètres du générateur de nombres pseudo-aléatoires  $a$ ,  $c$ ,  $m$  et  $y_0$ , et enfin le nombre de simulation  $M$  à effectuer.
- 14) En prenant  $r = 0.02$ ,  $K = 105$ ,  $u = 1.05$ ,  $d = 0.95$ ,  $S = 100$ , donnez la valeur d'une option de vente européenne de maturité  $T = 10$ ,  $T = 20$  et  $T = 30$ .
- 15) Avec le même modèle de sous-jacent qu'à la question 13), écrivez un priceur d'options (d'achat et de vente) asiatiques utilisant la méthode de Monte-Carlo. Les paramètres passés au priceur seront les valeurs de  $r$ ,  $u$ ,  $d$ ,  $K$ ,  $S$  et  $T$ , ainsi que les paramètres du générateur de nombres pseudo-aléatoires  $a$ ,  $c$ ,  $m$  et  $y_0$ , ainsi que le nombre de simulation  $M$  à effectuer.
- 16) En prenant  $r = 0.02$ ,  $K = 105$ ,  $u = 1.05$ ,  $d = 0.95$ ,  $S = 100$ , donnez la valeur d'une option de vente asiatique de maturité  $T = 10$ ,  $T = 20$  et  $T = 30$ .