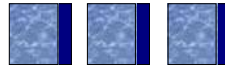


Bibliographie conseillée

- B. Baynat, *Théorie des files d'attente*, Ed. Hermès 2000
- J.R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1996
- R. Jain, *The art of Computer Systems Performance Analysis – Techniques for Experimental Design, Measurement, Simulation and Modeling*, Ed. Wiley 1991
- A. Kershenbaum, *Telecommunications Network, Design, Algorithms*, Mc Graw-Hill 1993
- M. Schwartz, *Computer Communication Network : Design and Analysis*, Prentice-Hall 1977
- L. Kleinrock, *Communication Nets : stochastic message flow and delay*, Mc Graw-Hill 1964



4

Agenda

Pré-requis

- Chaînes de Markov à temps discret
- et à temps continu
- Processus de Naissance et de Mort



6

Modélisation et Évaluation de performances de réseaux

Chapitre 1 : Processus Markoviens

(maj : jan 06)



Fabrice Valois
fabrice.valois@insa-lyon.fr
<http://fvalois.insa-lyon.fr/>



5

Préliminaire

- Probabilités (Bayes, thm des probabilités totales, etc.)
- Espérance
- Variance
- Loi exponentielle
- Processus de Poisson et processus *sans mémoire*
- Processus stochastique



7

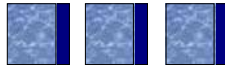
Processus stochastique ?

Définition : Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$ est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire.

- Un processus stochastique est donc une famille de variables aléatoires (non indépendantes)
 - Le temps T , peut être discret ou continu
 - L'ensemble E des valeurs que peut prendre $X(t)$ est appelé *espace d'états* et peut être discret ou continu

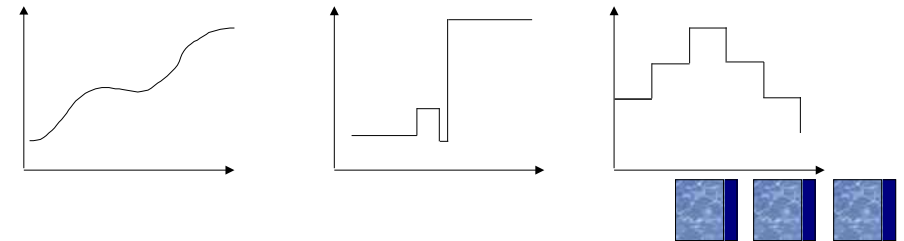
⇒ le processus de Poisson est un processus stochastique

8



Espace d'états discret/continu Temps discret/Continu

- Une **trajectoire** d'un processus est décrit par un couple (espace, temps)
 - L'espace peut être discret (ED) ou continu (EC)
 - Le temps peut être discret (TD – top d'horloge), continu (TC – écoulement du temps), temps continu où les évolutions n'ont lieu qu'à des instants discrets (EvD)



9



Ex/Ty : Quelques exemples

- EC/TC : réaction chimique ou le mouvement de particules en interaction
- EC/TD : modèle journalier de remplissage d'un barrage
- ED/TC : le nombre de particules au cours d'une réaction chimique
- ED/EvD : nombre de clients dans une file d'attente
- ED/TD : le gain d'un joueur à chaque étape

10



Agenda

- Pré-requis
- Chaînes de Markov à temps discret**
- et à temps continu
- Processus de Naissance et de Mort

11



Ce que l'on va apprendre

- ' Le formalisme en temps discret : chaînes de Markov
- ' Et sa version en temps continu
- ' Utilisations

⇒ Outils simples de modélisation
 ⇒ Nécessaires pour la théorie des files d'attente

12

Définition de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

' Définition

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une CMTD ssi :

$$P[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}]$$

i.e. C'est un processus sans mémoire ! De plus :

$$P[X_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0] = p_{i_0}^{(0)} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}$$

' Restriction

On ne considère que les CMTD *homogène*, ie tq :

$$p_{ij} = P[X_n = j / X_{n-1} = i] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

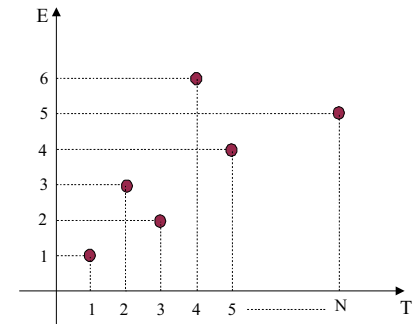
rq : on vérifie toujours : $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$

14

CMTD ou... Les Chaînes de Markov à Temps Discret !

Soit un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à temps **discret** et espace d'états discret...

E peut-être fini ou infini (mais dénombrable)

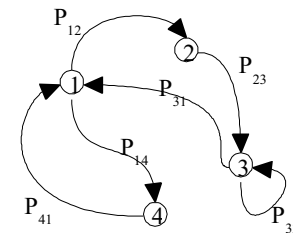


Processus stochastique à espace d'états discrets et temps **discret**

13

Représentation

' CMTD = Graphe orienté



$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{cases} p_{23} = p_{41} = 1 \\ p_{12} + p_{14} = 1 \\ p_{33} + p_{31} = 1 \end{cases}$$

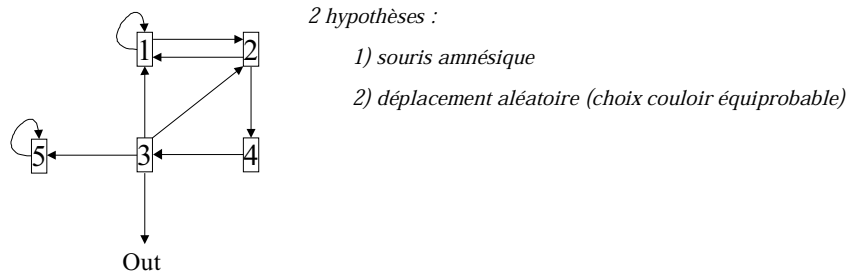
' Matrice transition

$$P = [p_{ij}]_{i,j \in E}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

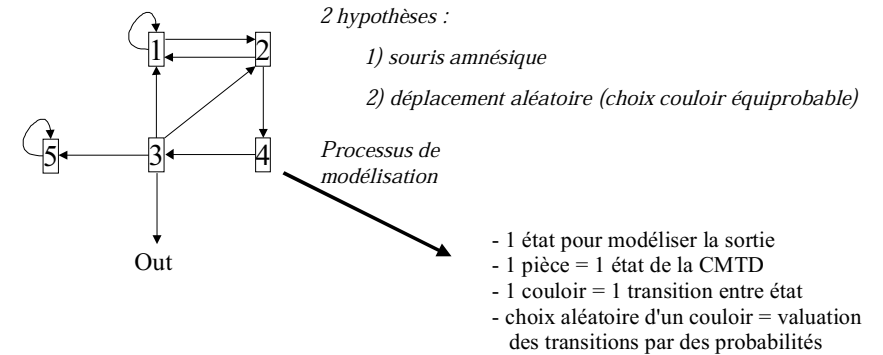
15

Jouons à la souris (1)



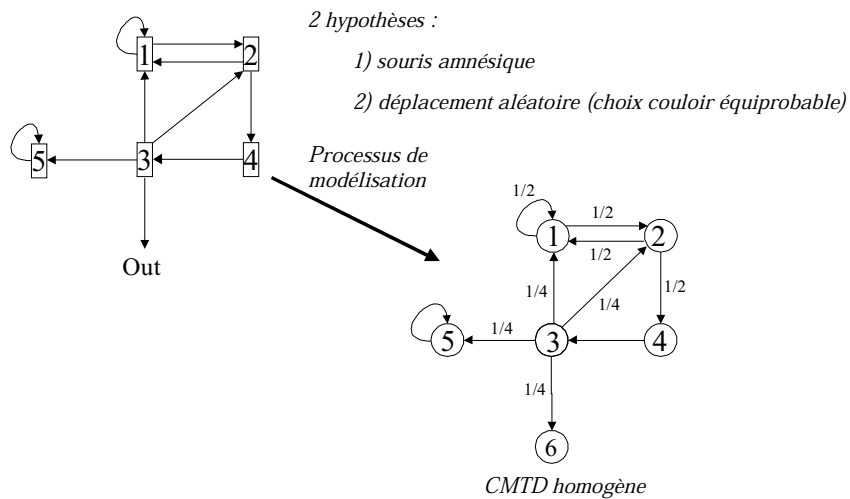
16

Jouons à la souris (1)



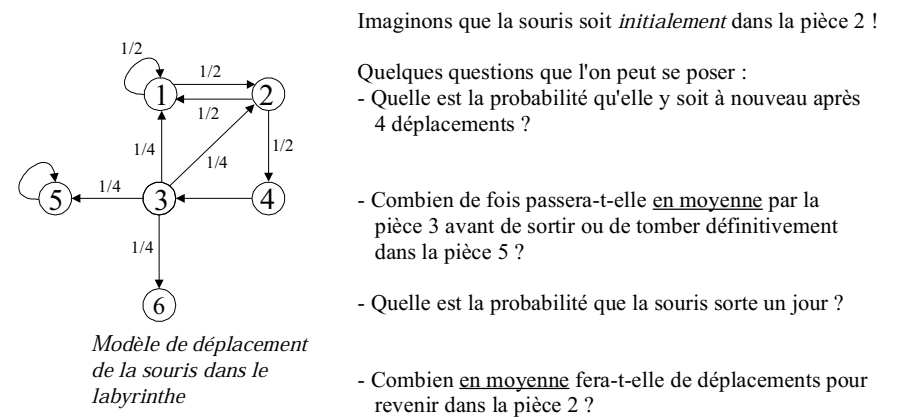
17

Jouons à la souris (1)



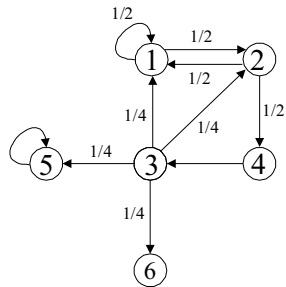
18

Jouons à la souris (1)



19

Jouons à la souris (1)



Modèle de déplacement
de la souris dans le
labyrinthe

Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

Quelques questions que l'on peut se poser :

- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

$$\pi_2^{(4)} = \frac{3}{16}$$

- Combien de fois passera-t-elle en moyenne par la pièce 3 avant de sortir ou de tomber définitivement dans la pièce 5 ?

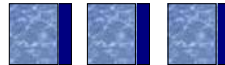
$$R_{23} = 2$$

- Quelle est la probabilité que la souris sorte un jour ?

$$f_{26} = \frac{1}{2}$$

- Combien en moyenne fera-t-elle de déplacements pour revenir dans la pièce 2 ?

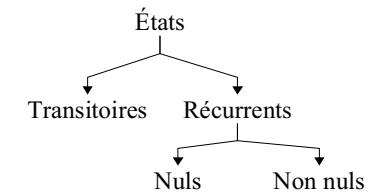
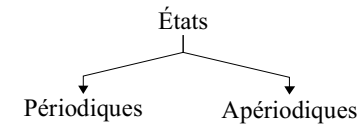
$$M_2 = \frac{2}{-}$$



20

Analyse d'une CMTD

- ' Régime **transitoire**
- ' Distribution du temps de séjour dans un état
- ' Classification des états



- ' Régime **permanent**



21

Régime transitoire d'une CMTD

- ' But : déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilité d'états $\pi_j^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P[X_n = j]$ pour que le processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans l'état j à la $n^{\text{ème}}$ étape du processus :

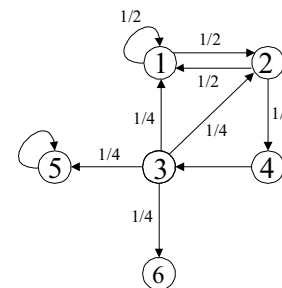
$$\pi^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} [\pi_j^{(n)}]_{j \in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots]$$

- ' Dépend de :
 - ' La matrice de transition P
 - ' Le vecteur de probabilités initiales $\pi^{(0)}$



22

Le départ de la souris (2)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

↓

$$\pi^{(0)} = [0, 1, 0, 0, 0, 0] \text{ soit } \begin{cases} \pi_2^{(0)} = 1 \\ \pi_j^{(0)} = 0, \forall j \neq 2 \end{cases}$$

$\pi^{(n)}$: Etat du processus à la $n^{\text{ème}}$ étape du processus



23

Régime transitoire (...)

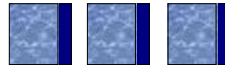
- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j / X_{n-1} = i] \times P[X_{n-1} = i]$$

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij}$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} * P^n$$



24

Régime transitoire (...)

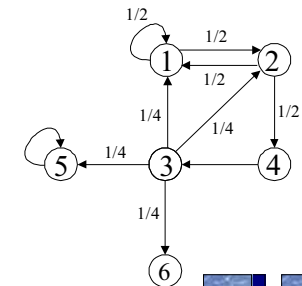
- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij}$$

Retour sur notre exemple :

$$\pi_1^{(n)} = \pi_1^{(n-1)} \times p_{11} + \pi_2^{(n-1)} \times p_{21} + \pi_3^{(n-1)} \times p_{31}$$

$$\pi_1^{(n)} = \frac{1}{2} \pi_1^{(n-1)} + \frac{1}{2} \pi_2^{(n-1)} + \frac{1}{4} \pi_3^{(n-1)}$$



25

Régime transitoire (...)

- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij} \quad \pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} * P^n$$

- Évolution globale du processus X_n :

- Soit $p_{ij}^{(m)}$ la probabilité de transition de i vers j en m étapes :

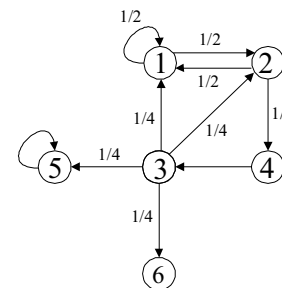
$$p_{ij}^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} P[X_{n+m} = j / X_n = i]$$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m-1)} \cdot p_{kj}$$



26

Le retour de la souris (3)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

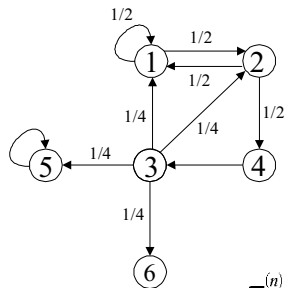
- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

ie : calcul de $\pi_2^{(4)}$ sachant que $\pi_2^{(0)} = 1$



27

Le retour de la souris (3)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

ie: calcul de $\pi_2^{(4)}$ sachant que $\pi_2^{(0)} = 1$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \times P^n$$

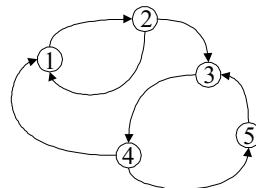
$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j / X_0 = i] \times P[X_0 = i]$$

28

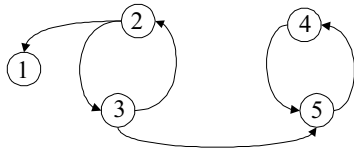
Classification des états d'une CMTD irréductible

Définition : une CMTD est dite *irréductible* ssi de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes) :

$$\forall i, j \in E, \exists m > 1 \text{ tel que } p_{ij}^{(m)} \neq 0$$



Remarque : tout chaîne non irréductible possède au moins une sous-chaîne absorbante



30

Temps de séjour

Distribution du temps de séjour (propriété) :

Le temps (en nombre d'étapes) passé dans un état d'une chaîne de Markov en temps discret a une distribution géométrique (de paramètre p_{jj} , pour tout état j)

29

Classification des états d'une CMTD périodique

Définition : un état j est *périodique* si on peut y revenir qu'après un nombre d'étapes multiple de $k > 1$

$$\exists k > 1 \text{ tel que } p_{jj}^{(m)} = 0 \text{ pour } m \text{ non multiple de } k.$$

Remarque : la période de l'état j est alors le plus grand entier k vérifiant cette propriété

Définition : la période d'une CMTD est égale au PGCD de la période de chacun de ses états. Une CTMD est dite *périodique* si sa période est supérieure à 1 (et *apériodique* si sa période est égale à 1)

Propriété : la période d'une CMTD est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits du graphe associé

31

Classification des états d'une CMTD transitoire

- Soit $f_{jj}^{(n)}$ la probabilité que le premier retour en j ait lieu n étapes après l'avoir quitté.
- Soit f_{jj} la probabilité de revenir en j après l'avoir quitté :

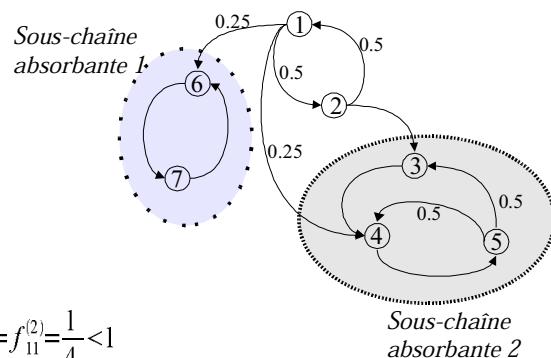
$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$
- Soit M_j , le temps moyen de retour en j :

$$M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$
- Définition** : un état j est dit :
 - Transitoire si $f_{jj} < 1$
 - Récurrent si $f_{jj} = 1$; de plus il est :
 - Récurrent nul si le temps moyen de retour en infini : $M_j = \infty$
 - Récurrent non nul si le temps moyen de retour est fini : $M_j < \infty$



32

Classification d'une CMTD (exemple)



Etat 1 : TRANSITOIRE car $f_{11} = f_{11}^{(2)} = \frac{1}{4} < 1$

Etat 6 : RECURRENT NON NUL car $f_{66} = f_{66}^{(2)} = 1$ et $M_6 = 2 < \infty$

Etat 3 : RECURRENT NON NUL car $f_{33} = 1$ et $M_3 = 5$



34

Classification des états d'une CMTD transitoire (...)

- Ergodique = apériodique et récurrent non nul
- Propriété** : tous les états d'une CMTD irréductible sont tous de même nature
- Propriété** : tous les états d'une CMTD irréductible finie sont récurrents non nuls.



33

Autres paramètres de performances...

- $f_{ij}^{(n)}$: proba($i \rightarrow j$ en exactement n étapes)

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$$
- f_{ij} : proba($i \rightarrow j$ en n , quelconque, d'étapes)

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}$$
- Soit R_{ij} le nombre moyen de passages par l'état j sachant que l'on vient de l'état i

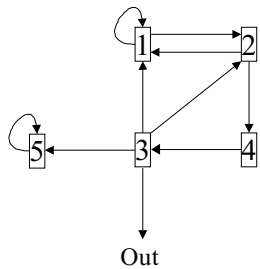
$$R_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \text{Proba}(\text{exactement } n \text{ passages par } j | \text{état initial} = i)$$

$$R_{ij} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}$$



35

La trappe de la souris (4)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Combien de fois passera-t-elle en moyenne par la pièce 3 avant de sortir ou de tomber définitivement dans la pièce 5 ?

ie : on cherche le nombre moyen de passages en 3 !

R_{ij} = nb moyen de passages par l'état j
sachant que l'on vient de l'état i

$$\rightarrow R_{23} = \frac{f_{23}}{(1 - f_{33})}$$

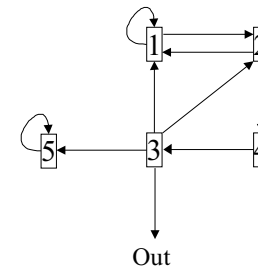
$f_{23} = \dots$

...



36

Sauvons la souris (5)



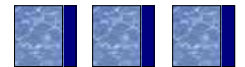
Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Quelle est la probabilité que la souris sorte un jour ?

SORTIE = état 6 $\rightarrow$ Calculons f_{26}

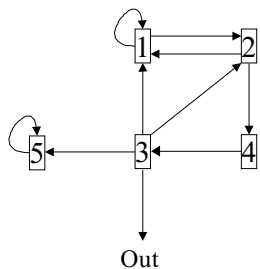
$$f_{26} = p_{21}f_{16} + p_{24}f_{46} = \dots$$

...



37

La souris tourne en rond (6)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Combien en moyenne fera-t-elle de déplacements pour revenir dans la pièce 2 ?

Réponse : M_2 = temps moyen de retour en 2 !



38

Régime permanent

- Étude d'un état *stationnaire* (s'il existe !!!)
- i.e. : on s'intéresse à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ du vecteur des probabilités $\pi(n)$
 - Cette limite existe-t-elle ?
 - Comment la calculer (si oui) ?

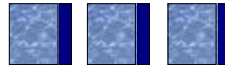


39

Comment analyser ?

- Facile ! Il *suffit* d'étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} [\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^{(n)}]$
- Mais comment faire pour calculer $P^{(n)}$?
 - Diagonalisation de P en : $P = U^{-1} \cdot D \cdot U$ où D est la matrice des valeurs propres, U base (inversible)
 - D'où : $P^n = U^{-1} \cdot D^n \cdot U$
 - L'existence du régime stationnaire se résume à l'existence et au calcul éventuel de :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(0)} U^{-1} \cdot D^n \cdot U$$



40

Régime permanent : Propriété

- Dans une CMTD irréductible et apériodique le vecteur π des probabilités limites $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)}$ existe toujours et est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\pi^{(0)}$
- Soit tous les états sont transitoires ou récurrents nuls et $\pi_j = 0$ pour tout $j \in E$
- Soit tous les états sont récurrents non nuls et les π_j sont solutions du système :

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad \forall j \in E$$

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1$$



42

Comment analyser (plus simple)

- Intuitivement, on a envie de dire :
régime permanent $\Rightarrow \pi^n = \pi^{n+1}$
Donc, il faut résoudre $\pi = \pi P$
- Mais quelles sont les conditions pour que ça marche ?
 - Chaîne irréductible
 - CMTD apériodique
 - États récurrents non nuls



41

Quelques remarques

- $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad \forall j \in E \Leftrightarrow \pi = \pi P$
- $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \Leftrightarrow \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \sum_{j \in E} \pi_i p_{ij} \text{ car } \sum_{i \in E} p_{ji} = 1$
 - $\pi_j p_{ji} = \text{nb moyen de transitions de } j \text{ vers } i \text{ par unité de temps, donc la somme } (\Sigma) \text{ est le flux moyen de sortie de l'état } j$
 - Idem pour $\pi_i p_{ij}$ qui le flux moyen d'entrée dans l'état j
 - Donc en régime permanent, on peut écrire :

Pour tout état j , flux sortant de j = flux entrant dans j
- Si les probabilités stationnaires existent, alors : $\pi_i = \frac{1}{M_i}$



43

Agenda

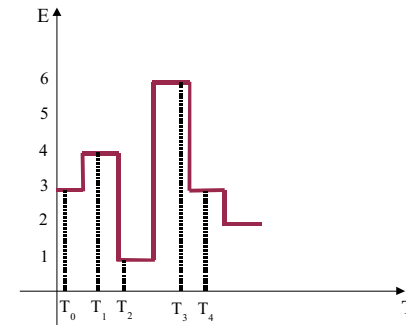
- Pré-requis
- Chaînes de Markov à temps discret
- et à temps continu
- Processus de Naissance et de Mort

44

La version continue des Chaînes de Markov

Soit un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à temps **continu** et espace d'états discret...

E peut-être fini ou infini (mais dénombrable)



Processus stochastique à espace d'états discrets et temps **continu**

45

Définition de $\{X_t\}_{t \geq 0}$

Définition

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une CMTC ssi :

$$P[X(t_n)=j / X(t_{n-1})=i_{n-1}, X(t_{n-2})=i_{n-2}, \dots, X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j / X(t_{n-1})=i_{n-1}]$$

i.e. C'est un processus sans mémoire !

Restriction

On ne considère que les CMTC *homogène*, c'est-à-dire celles dont les probabilités p_{ij} sont indépendantes des instants d'observations, soit :

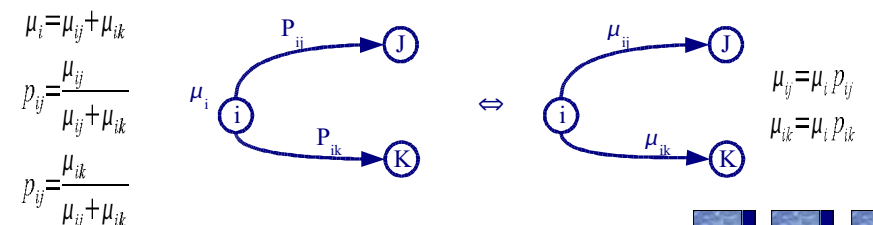
$$p_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P[X(t+s)=j / X(s)=i] \quad \forall s \geq 0$$

46

Caractérisations d'une CMTC

Une CMTC est un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu tel que :

- Le temps passé dans un état i a une distribution exponentielle de taux μ_i
- Les transitions d'un état i vers les autres états sont probabilistes



47

Analyse des CMTC's

A une CMTC, on associe une matrice Q , appelée *générateur infinitésimal* tel que :

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \mu_{1j} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1j} & \cdots \\ \mu_{21} & -\sum_{j \neq 2} \mu_{2j} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{i1} & & & \mu_{ij} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

48

Analyse du régime permanent d'une CMTC

- Comme dans le cas discret :
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$ existe-t-elle ?
 - Si elle existe, peut-on la calculer ?
- Rappel : pour un CMTD, la condition est d'être irréductible et apériodique !
 - Periodicité d'une CMTC ?...

50

Régime transitoire

- Consiste à déterminer le vecteur $\pi(t)$ des probabilités d'état : $\pi(t) \equiv P[X(t)=j]$ à tout instant du processus :

$$\pi(t) \equiv [\pi_j(t)]_{j \in E} = [\pi_1(t), \pi_1(t), \dots]$$

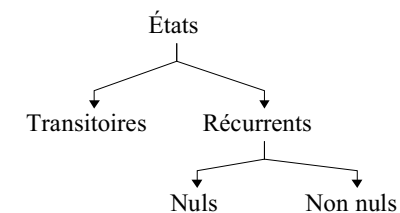
- De la même façon que pour une CMTD, ce vecteur des probabilités dépend :
 - Du générateur infinitésimal Q
 - Du vecteur des probabilités d'états initiales $\pi(0)$
- On montre que :

$$\pi(t) = \pi(0)e^{Qt}$$

$$\text{avec } e^{Qt} \equiv Id + Qt + \frac{(Qt)^2}{2}! + \dots$$

49

Classification des états

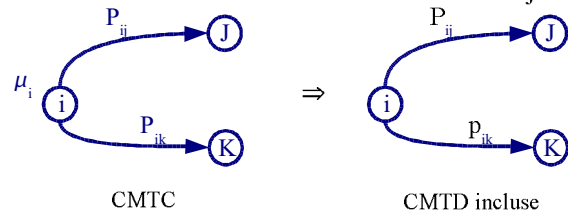


- Si la CMTC est irréductible alors tous les états sont de même nature
 - Lien fort entre CMTC et CMTD ⇒ notion de **CMTD incluse**

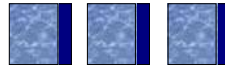
51

CMTD incluse

Définition : La CMTD incluse dans la CMTC de générateur infinitésimal Q , avec les éléments $q_{ij} = \mu_i p_{ij}$ ($i \neq j$), est une chaîne de Markov à temps discret dont la matrice de transitions a pour éléments les p_{ij} .



$$\text{Avec : } \pi_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} = \frac{\mu_{ij}}{\sum_{k \neq i} \mu_{ik}}$$



52

Existence des probabilités stationnaires

Propriété : Dans une CMTC irréductible, le vecteur π des probabilités limites $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t)$ existe toujours et est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\pi(0)$.

- Soit tous les états sont transitoires ou récurrents non nuls et $\pi_j = 0$ pour tout $j \in E$
- Soit tous les états sont récurrents non nuls et les π_j sont l'unique solution du système :

$$\sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0, \quad \forall j \in E$$

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1$$



54

Conséquences de la chaîne incluse

Propriétés : une CMTC est irréductible ssi la CMTD incluse est irréductible.

- $i \in \text{CMTC}$ est transitoire $\Leftrightarrow i \in \text{CMTD incluse}$ est transitoire
- $i \in \text{CMTC}$ est récurrent $\Leftrightarrow i \in \text{CMTD incluse}$ est récurrent

Propriété : Tous les états d'un CMTC irréductible sont de même nature :

- Soit tous transitoires,
- Soit tous récurrents nuls,
- Soit tous récurrents non nuls.

Si, de plus, E est fini, tous les états sont récurrents non nuls



53

Quelques remarques

$$\sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0, \quad \forall j \in E \Leftrightarrow \pi Q = 0$$

$$\sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} + \pi_j q_{jj} = 0$$

$$\text{or } q_{ij} = \mu_{ij} \text{ et } q_{jj} = -\sum_{i \neq j} \mu_{ji}$$

$$\text{Donc } \sum_{i \neq j} \pi_i \mu_{ij} = \sum_{i \neq j} \pi_j \mu_{ji}$$

Dernière équation = équation d'état traduisant l'équilibre entre le flux entrant dans l'état j et le flux sortant de l'état j , i.e.

Pour tout état j , flux sortant de j = flux entrant dans j

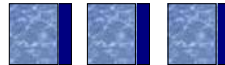


55

Résolution numérique des CMTC

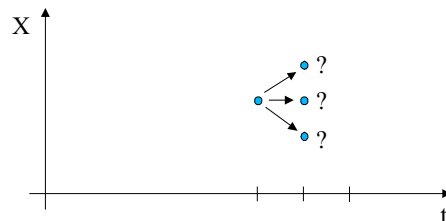
- Utilisation de méthodes itératives
- Gauss-Seidel, Jacobi, méthode de relaxation SOR/SSOR
- Outils :
 - PRISM (Probabilistic Symbolic Model Checker) :
<http://www.cs.bham.ac.uk/~dxp/prism/>
 - MathLab
 - Mobius (Model-based environment ofr Validation of System, Reliability, Availability, Security and Performance)
<http://www.mobius.uiuc.edu/>

56



Processus de Naissance et de Mort

- Cas particulier des processus Markoviens tels que $\{X_n=i\}$
 - Stable $\Rightarrow X_{n+1} = i$
 - Mort $\Rightarrow X_{n+1} = i-1$
 - Naissance $\Rightarrow X_{n+1} = i+1$



58



Agenda

- Pré-requis
- Chaînes de Markov à temps discret
- et à temps continu
- Processus de Naissance et de Mort**

57



Processus de Naissance et de Mort (temps continu)

- Dans un état E_k et dans un *petit* intervalle de temps Δt seuls deux événements peuvent se produire :
 - Naissance : probabilité = $\lambda_k \cdot \Delta t$
 - Mort (si $k > 0$) : probabilité = $\mu_k \cdot \Delta t$
 - ... et rien se produire avec une proba = $(1 - (\lambda_k + \mu_k)) \cdot \Delta t$
- La matrice des taux de transition est définie par :

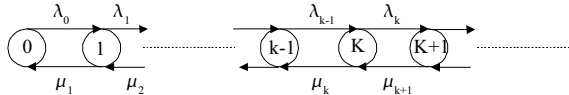
$$\begin{aligned}
 q_{kk} &= -(\lambda_k + \mu_k) \\
 q_{k,k+1} &= \lambda_k \\
 q_{k,k-1} &= \mu_k \text{ pour } k > 0 \\
 q_{kj} &= 0 \text{ sinon}
 \end{aligned}$$

59



État stationnaire d'un processus de naissance et de mort (1)

Représentation graphique de la chaîne de Markov



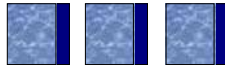
Équations d'états d'équilibre :

Pour tout état j , flux sortant de j = flux entrant dans j

$$\begin{aligned}\mu_1 p(1) &= \lambda_0 p(0) \\ (\lambda_k + \mu_k) p(k) &= \lambda_{k-1} p(k-1) + \mu_{k+1} p(k+1), \text{ pour } k > 1 \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\text{soit } p(k+1) = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} p(k)$$

$$\text{donc } p(k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p(0)$$



60

État stationnaire d'un processus de naissance et de mort (2)

Condition de stabilité (ergodicité)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$$

Une condition suffisante : à partir d'un certain état le rapport naissance / mort reste inférieur à un seuil < 1

$$\exists \rho < 1, k_0, \text{ tels que } k > k_0 \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\mu_i} \leq \rho$$

La formule générale :

$$p(k) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$



61

Processus de naissance et de mort célèbres...

Processus de Naissance Pure :

- Pas de mort : $\mu_k = 0$
- Taux de naissance indépendant de la population : $\lambda_k = \lambda$
- Il s'agit de... la loi de Poisson défini par : $p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Processus de Mort Pure :

- Pas de naissance : $\lambda_k = 0$
- Taux de mortalité indépendant de la population : $\mu_k = \mu$
- Il s'agit de... la loi exponentielle : $p_k(t) = e^{-\mu t}$



62