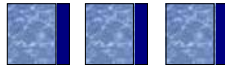


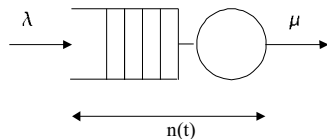
Introduction

- ' Tout ou presque sur la M/M/1
- ' Un peu de travail sur la M/M/∞
- ' Une file avec blocage : la file M/M/1/K
- ' Modélisation d'un commutateur M/M/C/C (à l'ancienne)
- ' Limites des lois markoviennes

2



Définition de la M/M/1



- ' M/M/1 ?
 - ' Processus d'arrivée des clients dans la file : Poisson (λ)
 - ' Temps de service d'un client : distribution exponentielle (μ)
 - ' File de capacité infinie
 - ' Serveur unique
 - ' Discipline de service de la file : FIFO

4



Étude de la file M/M/1

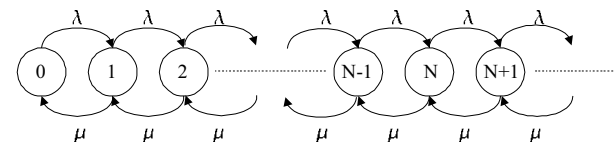
- ' Définition
- ' CMTC associée
- ' Stabilité
- ' Analyse du régime permanent
- ' Calcul des paramètres de performances
 - ' Débit X
 - ' Taux d'utilisation du serveur U
 - ' Nombre moyen de clients Q
 - ' Temps moyen de séjour R

3



CMTC associée à la M/M/1

- ' Description : processus $\{n(t)\}_{t \geq 0}$: stochastique, espace d'états discrets, temps continu, sans mémoire
⇒ c'est bien une CMTC !
- ' Graphe associé



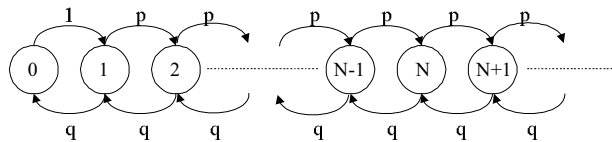
5



Stabilité d'une M/M/1 ?

- Construction de la CMTD incluse avec :

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \text{ et } q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$



CMTD incluse dans la CMTC de la file M/M/1

6

Analyse du régime permanent de la M/M/1

- Analyse stationnaire d'une file stable ($\lambda < \mu$)
- $p(n)$ = probabilité stationnaire d'être dans l'état n
- Comment calculer ?
 - Système d'équations linéaires
 - Équations de balances locales
 - Équations aux frontières

8

Stabilité de la M/M/1 ?

- Étude de la CMTD incluse :
 - $p > q$, ie $\lambda > \mu$, tous les états sont transitoires
 - $p = q$, ie $\lambda = \mu$, tous les états sont récurrents nuls
 - $p < q$, ie $\lambda < \mu$, tous les états sont récurrents non nuls
- Donc :
 - $\lambda \geq \mu \Rightarrow$ états transitoires ou récurrents nuls $\Rightarrow \forall n, p(n) = 0$
 - $\lambda < \mu \Rightarrow$ états récurrents non nuls $\Rightarrow \forall n, p(n) \neq 0$

7

Régime permanent 1. Système d'équations linéaires

- Rappel : avec les *bonnes* conditions, $p(n)$ est solution de :

$$pQ = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$$

où $p = [p(0), p(1), \dots]$ est le vecteur des probabilités stationnaires
où Q est le générateur infinitésimal de la CMTC :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ & \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ & & \vdots & 0 & \mu & \ddots \end{pmatrix}$$

9

Régime permanent

2. Balances locales

Équations d'états à l'équilibre :

Pour tout état j , flux sortant de j = flux entrant dans j

$$p(0)\lambda = p(1)\mu$$

$$p(1)(\lambda + \mu) = p(0)\lambda + p(2)\mu$$

$\vdots$

$$p(n)(\lambda + \mu) = p(n-1)\lambda + p(n+1)\mu, \quad \forall n \geq 1$$

Quelques lignes de calcul plus loin $\Rightarrow$ balances locales

$$p(0)\lambda = p(1)\mu$$

$$p(1)\lambda = p(2)\mu$$

$\vdots$

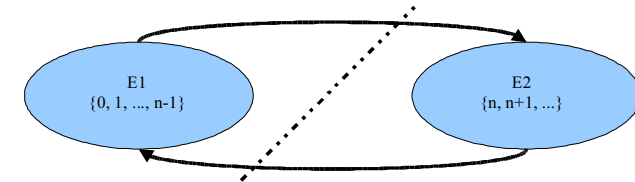
$$p(n)\lambda = p(n+1)\mu, \quad \forall n \geq 0$$

10

Régime permanent

3. Équations aux frontières

Décomposition en deux sous-systèmes E1 et E2 dont on égalise les flux



$$p(n-1)\lambda = p(n)\mu \quad \forall n \geq 1$$

11

Régime permanent de la M/M/1

- En notant : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ on a alors $p(n) = \rho p(n-1), \forall n \geq 1$
 $p(n) = \rho^n p(0), \forall n \geq 0$
- Calcul de la constante de normalisation : $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$
- Soit : $p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho$
- On obtient alors : $p(n) = (1 - \rho)\rho^n, \forall n \geq 0$

12

Paramètres de performances

Débit X

Débit X ?

Un service est effectué avec un taux μ si le système contient au moins un client :

$$X = \text{Proba}\{\text{file non vide}\} \mu = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\mu = [1 - p(0)]\mu = \rho\mu = \lambda$$

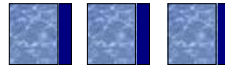
13

Paramètres de performances Taux d'utilisation du serveur U

Taux d'utilisation ? C'est la probabilité que le serveur de la file soit occupé :

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) = [1 - p(0)] = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

14

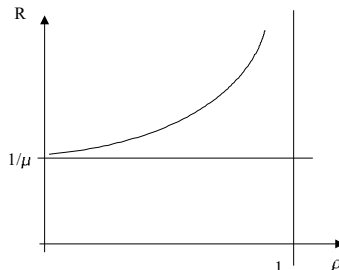


Paramètres de performances Temps moyen de séjour R

Utilisation de la loi de Little:

$$R = \frac{Q}{X} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Se qui s'écrit : $R = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$



16

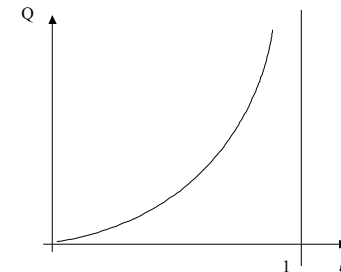


Paramètres de performances Nombre moyen de clients Q

Nombre moyen de clients = espérance du nombre de clients :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} n p(n) = (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n = \rho(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$Q = \frac{\rho}{1-\rho}$$



15



Étude de la M/M/∞

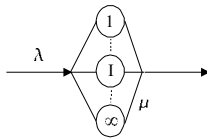
- Définition
- CMTC associée
- Stabilité
- Analyse du régime permanent
- Calcul des paramètres de performances
 - Débit X
 - Taux d'utilisation du serveur U
 - Nombre moyen de clients Q
 - Temps moyen de séjour R

17



Définition de la M/M/∞

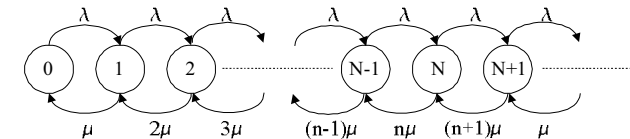
- M/M/∞ ?
 - Processus d'arrivée des clients dans la file : Poisson (λ)
 - Temps de service d'un client : distribution exponentielle (μ)
 - Nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres



18

CMTC associée à la M/M/∞

- A nouveau, description d'état la plus simple : $\{n(t)\}_{t \geq 0} \Rightarrow$ stochastique, espace d'états discrets, temps continu, sans mémoire
- $\Rightarrow$ c'est bien une CMTC !
- Graphe associé



19

Explication des taux $n\mu$?!

- Lorsqu'il y a n clients dans la file, le taux de transition de l'état n vers l'état $n-1$ est : $n\mu$?
- $\mathcal{P} = \text{proba}(n \rightarrow n-1 \text{ en } dt)$?
 - Un des n clients termine son service (le 1^{er}, le 2^{ème}, ..., le $n^{\text{ème}}$)
 - Aucun client n'arrive pendant dt !
 - Or :
 - $\text{proba}(\text{client termine son service, expo}(\mu)) = \mu dt + o(dt)$
 - $\text{proba}(\text{client ne termine pas son service, expo}(\mu)) = 1 - \mu dt + o(dt)$
 - $\text{proba}(\text{aucun client n'arrive, poisson}(\lambda)) = 1 - \lambda dt + o(dt)$
- $\mathcal{P} = p_{n,n-1}(dt) = \left(\sum_{j=1}^n (\mu dt + o(dt)) (1 - \mu dt + o(dt))^{n-1} \right) (1 - \lambda dt + o(dt))$
- Développement limité du 1^{er} ordre : $\mathcal{P} = p_{n,n-1}(dt) = n\mu dt + o(dt)$

20

Stabilité de la M/M/∞

- Rappel : condition de stabilité d'une file M/M/1 ?
le nombre moyen de client arrivant dans la file par unité de temps doit être inférieur à la capacité de traitement de la file
- Serveur infini ?
Tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est immédiatement traité
- $\Rightarrow$ Une file M/M/∞ est toujours stable !

21

Analyse du régime permanent M/M/∞ équations aux frontières

$$p(n-1)\lambda = p(n)n\mu, \forall n \geq 1$$

$$\text{soit } p(n) = \frac{\rho}{n} p(n-1), \forall n \geq 1 \quad \text{où } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{et : } p(n) = \frac{\rho^n}{n!} p(0), \forall n \geq 1$$

$$\text{Condition de normalisation : } p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}} = e^{-\rho}$$

$$\text{Et finalement : } p(n) = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \quad \forall n \geq 1$$

22

Paramètres de performances de la M/M/∞ Débit X

- Le service s'effectue avec un taux $n\mu$ dans chaque état lorsque le système contient n clients :

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)n\mu = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho} \rho e^{\rho} \mu = \rho \mu = \lambda$$

23

Paramètres de performances de la M/M/∞ Nombre moyen de clients Q

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} np(n) = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho} \rho e^{\rho} = \rho$$

24

Paramètres de performances de la M/M/∞ Temps moyen de séjour R

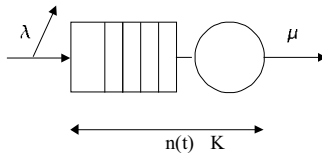
- Utilisation de la loi de Little

$$R = \frac{Q}{X} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

25

Une file avec blocage : la file M/M/1/K

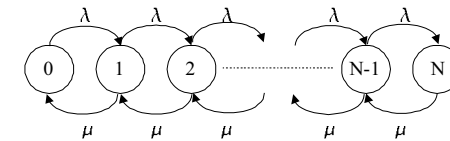
- C'est un file identique à la file M/M/1 mais la capacité de la file d'attente est finie.
- Si un client arrive (suivant une loi de Poisson de taux λ) et qu'il y a déjà K clients présents dans le système, il est **perdu** !



26

CMTC associée à la file M/M/1/K

- Description : processus $\{n(t)\}_{t \geq 0}$ représentant le nombre de clients dans le système : stochastique, espace d'états discrets (et fini), temps continu, sans mémoire
 $\Rightarrow$ c'est bien une CMTC !
- Graphe associé :



27

Stabilité d'une file M/M/1K

- CMTC : irréductible et, comme l'espace d'état est fini, tous les états sont récurrents non nuls
- Il n'y a donc pas de condition de stabilité pour la file M/M/1/K

28

Analyse du régime permanent de la M/M/1/K

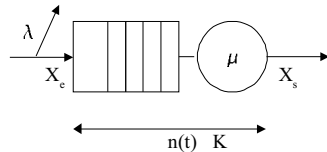
- Soit $p(n)$ la probabilité d'être dans l'état n .
- Équations aux frontières
 $\Rightarrow p(n-1)\lambda = p(n)\mu$ pour $n = 1, \dots, K$
 Soit : $p(n) = \rho p(n-1)$ pour $n = 1, \dots, K$ où : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
 Et finalement : $p(n) = \rho^n p(0)$ pour $n = 0, \dots, K$
 En utilisant la condition de normalisation, on peut déduire $p(0)$:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \rho^n} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

Ce qui permet d'écrire finalement : $p(n) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho^n$ pour $n = 0, \dots, K$

29

Paramètres de performances Débit X



Calcul du débit moyen

- Mesurer le taux de départ des clients en sortie du serveur : X_s
- Mesurant le taux d'arrivée **effectif** des clients acceptés dans le système : X_e

30

Paramètres de performances Taux d'utilisation du serveur U

$$U = \sum_{n=1}^K p(n) = 1 - p(0) = \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} = \rho \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}}$$

- Dans le cas d'une file à capacité limitée, le taux d'utilisation n'est plus égal à ρ !
- Nous avons toujours : $U = X/\mu$ mais ici $X \neq \lambda$

32

Paramètres de performances Débit X (fin)

- $X_s = \mu$ dès l'instant où la file n'est pas vide :

$$X_s = \text{Proba}\{\text{file non vide}\} \mu = \sum_{n=1}^K p(n) \mu = [1 - p(0)] \mu = \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} \mu$$

- $X_e = \lambda$ dès l'instant qu'un client arrive lorsque la file n'est pas pleine :

$$X_e = \sum_{n=0}^{K-1} p(n) \lambda = [1 - p(K)] \lambda = \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}} \lambda$$

- Finalement, comme $\rho = \lambda/\mu$: $X_e = X_s = X$

31

Paramètres de performances Nombre moyen de clients Q

$$Q = \sum_{n=0}^K n p(n) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \sum_{n=0}^K n \rho^n = \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{K+1}} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1 - \rho)^2}$$

$$Q = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}$$

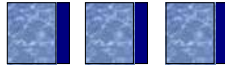
33

Paramètres de performances

Temps moyen de séjour R

- Quel temps de séjour ?
 - Temps moyen de séjour d'un client arrivant dans le système R_T
 - Temps moyen de séjour d'un client effectivement admis dans la file d'attente R.
- Calcul ? Application de la loi de Little !

34



Paramètres de performances

Temps moyen de séjour R (suite)

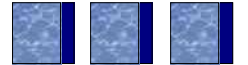
- En ne considérant que les clients effectivement admis :

$$R = \frac{Q}{X}$$
- En considérant tous les clients, y compris les rejetés :

$$R_T = \frac{Q}{\lambda}$$
- Soit α la proportion de clients admis dans le système :

$$\alpha = \frac{X}{\lambda}$$
- Finalement : $R_T = \alpha R + (1 - \alpha)0 = \frac{X}{\lambda} R$

35



Limite des lois markoviennes

- Les lois de service et d'arrivée sont de mauvaises approximations de
 - Lois fortement déterministes
 - Lois fortement indéterministes
- L'hypothèse des arrivées et des services individuels exclut :
 - Les arrivées groupées
 - Les services groupés

36



Recherche de lois plus générales

- Les files à loi d'arrivées et loi de service markoviennes ont pour comportement un processus de naissance et de mort...
- Quelles lois pour comportement de chaînes de Markov quelconques ??
 - Intérêt : couvrir une large gamme de lois et être une bonne approximation des autres....
 - Inconvénient : trouver au cas par cas la résolution de la chaîne de Markov !

37

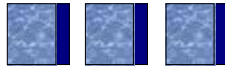


On a trouvé ! (des lois plus générales...)

Quelques extensions :

- Erlang ou comment rendre **plus** déterministe les lois markoviennes
- Markoviennes à arrivées multiples
- Hyperexponentielles ou comment rendre **moins** déterministe les lois markoviennes
- Cox : généralisation des lois Erlang et Hyperexponentielles

38

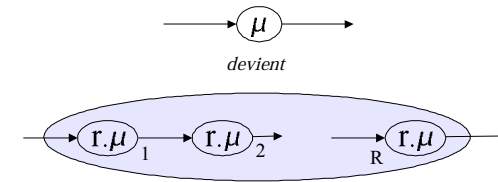


Distribution d'Erlang

Comment rendre plus déterministe les lois markoviennes ?

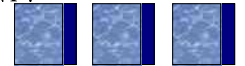
Idée :

- Répéter la même expérience de manière indépendante rapproche la loi de son espérance
- Un service de taux μ est remplacé par r services de taux $r.\mu$



- Attention : un seul serveur, donc un seul client servi !

39

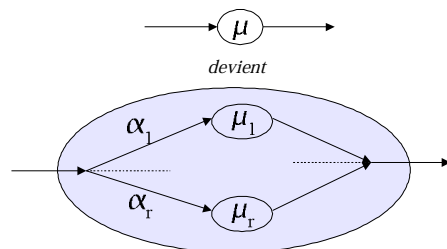


Distribution Hyperexponentielle

Comment rendre moins déterministe les lois markoviennes ?

Idée :

- Choix probabiliste entre serveurs hétérogènes
- Un service de taux μ est remplacé par des services de taux μ_i , chacun pouvant être choisi avec une probabilité α_i avec $\sum \alpha_i / \mu_i = 1 / \mu$



40

